ČELIČNE KONSTRUKCIJE I
PREDAVANJE 09

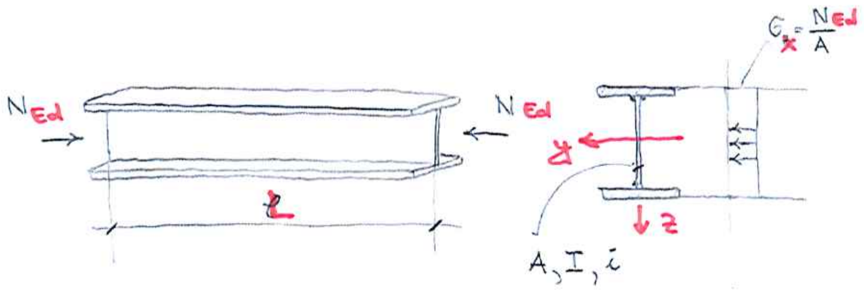
NOSIVOST ELEMENATA NA IZVIJANJE

- Nosivost konstruktivnog elementa treba dokazati kroz nosivost poprečnog presjeka i nosivost elementa na izvijanje. Na prethodna četiri predavanja govorilo se o dokazima nosivosti poprečnog presjeka. U narednih pet biće riječi o dokazima nosivosti elementa na izvijanje.

- Provjera nosivosti elementa na izvijanje se sprovodi u sljedećim slučajevima:
    - *Pritisnuti elementi - Provjera izvijanja;*
    - *Elementi opterećeni na savijanje - Provjera bočno-torzionog izvijanja;*
    - *Elementi opterećeni na savijanje i aksijalni pritisak - Provjera gubitka stabilnosti.*

PRITISNUTI ELEMENTI - PROVJERA IZVIJANJA

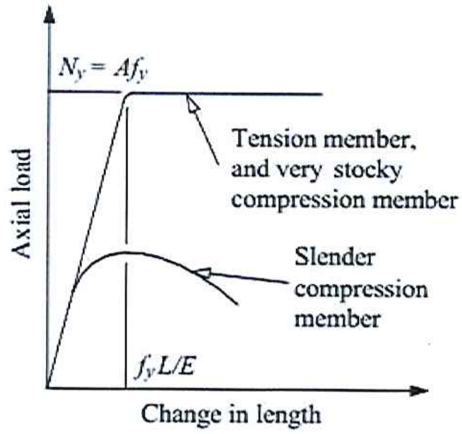
UVOD



nacrtati

- Nosivost pritisnutog elementa zavisi od nosivosti bruto poprečnog presjeka (vidi pritisak) ili od pojave fenomena gubitka stabilnosti, kao što su fleksiono izvijanje (kao najčešća pojava), torziono izvijanje ili fleksiono-torziono izvijanje.

- Najčešće se izbor poprečnog presjeka (dimenzionisanje) pritisnutog elementa sprovodi kroz provjeru nosivosti s obzirom na gubitak stabilnosti. Nosivost presjeka, je mjerodavna samo kod kratkih konstruktivnih elemenata, sa veoma malom vitkošću, što nije čest slučaj u realnim konstrukcijama.

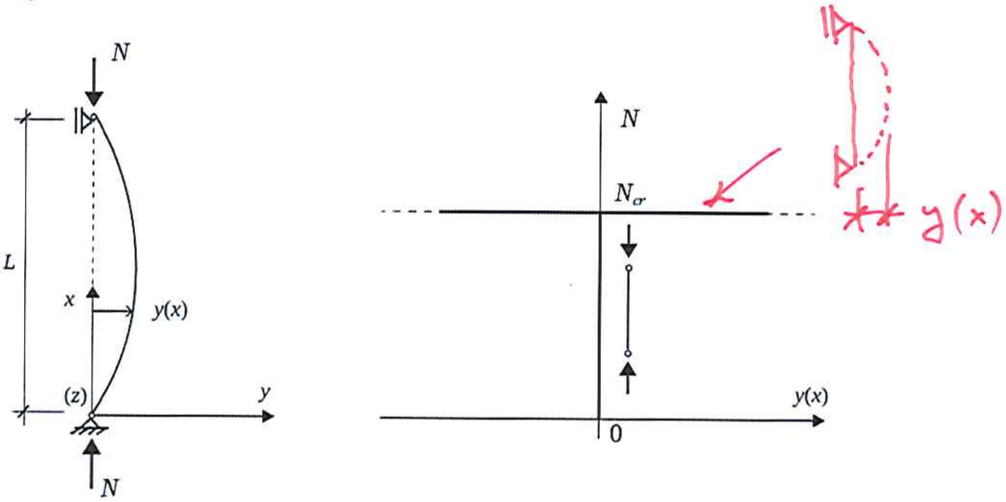


- Nosivost presjeka na aksijalni pritisak se zasniva na kapacitetu plastične nosivosti bruto presjeka (presjeci klase 1, 2 i 3) ili efektivne elastične nosivosti presjeka klase 4, uzimanjem u obzir fenomena lokalnog izbočavanja.

- Nosivost pritisnutog elementa na izvijanje zavisi od odgovarajućeg oblika izvijanja i odgovarajućih nesavršenosti realnog konstruktivnog elementa. Ovo razmatranja se daju u nastavku.

ELASTIČNA KRITIČNA SILA

- Kritična sila izvijanja za centrično pritisnut element predstavlja silu pri kojoj deformacija prestaje da bude elastično aksijalna i javljaju se deformacije savijanja oko neke ose. Ovaj fenomen bočnog deformisanja ili izvijanje pritisnutog elementa, i koji se dešava u formi savijanja, naziva se fleksiono izvijanje.



- Do kritične sile izvijanja, ili Ojlerove kritične sile, po švajcarskom istraživaču Leonhard Euler-u (1707 - 1783), koji je ovu teoriju prvi predložio 1744. g., dolazi se pomoću linearne teorije elastične stabilnosti. Analizira se zglobno oslonjen stub, idealno prav, bez zaostalih napona (homogen), sa uniformnim poprečnim presjekom, izložen konstantnom centričnom pritisku. Pretpostavke koje se u ovoj teoriji uvode su:

  - *materijal se ponaša idealno elastično i proporcionalno,*
  - *deformacije odgovaraju teoriji malih pomjeranja i*
  - *ne dešavaju se torzione deformacije.*

- Za mala pomjeranja u deformisanoj figuri postavlja se uslov ravnoteže momenata savijanja oko ose izvijanja (z - osa na prethodnoj skici), ili definiše se diferencijalna jednačina savijanja elementa u deformisanom (izvijenom) obliku:

$$E\,I\frac{d^2y}{dx^2}+N\,y=0$$

- Riješenje ove homogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, daje se u obliku:

$$y = D_1 \sin(kx) + D_2 \cos(kx)$$

sa

$$k^2 = N/(E\,I)$$

- Iz oslonačkih uslova dobija se:

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$y(x=L) = 0 \Rightarrow D_1 \sin(k\,L) = 0 \Rightarrow D_1 = 0 \text{ or } k\,L = n\,\pi.$$

- Kritična sila se dobija iz:

$$k\,L = n\,\pi \Rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{N}{E\,I}$$

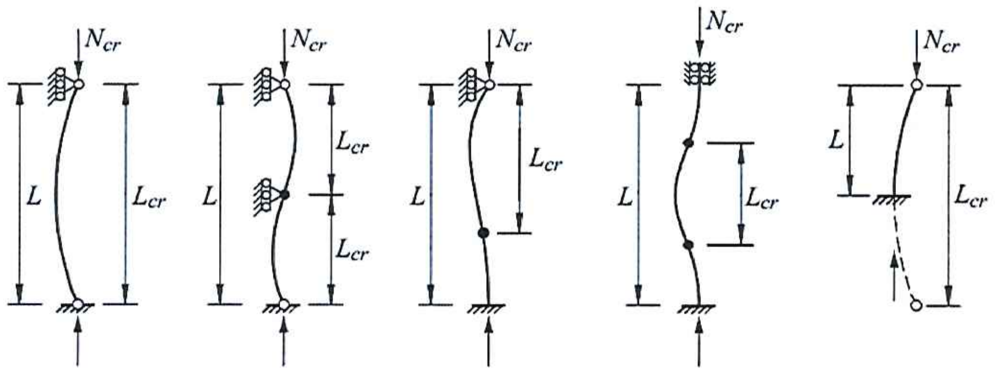
$$N_{cr} = \frac{n^2\,\pi^2\,E\,I}{L^2} \quad \text{(with } n = 1, 2, \ldots\text{)}$$

- Najniža kritična sila se dobija za n = 1 i odgovara deformaciji izvijanja sa prethodne slike:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2\,E\,I}{L^2}$$

- Može se zaključiti da nosivost na izvijanje, idealnog pritisnutog elementa, zavisi od krutosti na savijanje oko ose izvijanja, dužine elementa i uslova oslanjanja.

- Ovo je osnovni Ojlerov slučaj izvijanja, slučaj izvijanja proste grede. U daljem radu Ojler je definisao četiri osnovna slučaja izvijanja (razne varijante graničnih uslova). Za druge uslove oslanjanja kritična sila se dobija rješavajući diferencijalnu jednačinu četvrtog reda uz odgovarajuće granične uslove. Alternativno, rješenje se može dobiti pomoću analogije sa zglobno oslonjenim elementom, tako što se dužina pritisnutog elementa L zamijeni dužinom izvijanja L_{cr} ili L_E (efektivna dužina izvijanja - ranija oznaka, takođe često u upotrebi). Dužina izvijanja L_{cr} predstavlja dužinu sinusnog polutalasa koji se može uočiti na deformisanom (izvijenom) obliku elementa.



(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$N_{cr} = \pi^2 EI/L^2$	$N_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$	$N_{cr} \approx 2\pi^2 EI/L^2$	$N_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$	$N_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$
$L_{cr} = L$	$L_{cr} = L/2$	$L_{cr} \approx 0.7L$	$L_{cr} = L/2$	$L_{cr} = 2L$

- Kritični napon izvijanja σ_{cr}, u opštem slučaju, dobija se dijeljenjem Ojlerove kritične sile N_{cr} (za dužinu izvijanja L_E), sa površinom poprečnog presjeka A.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{A L_E^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

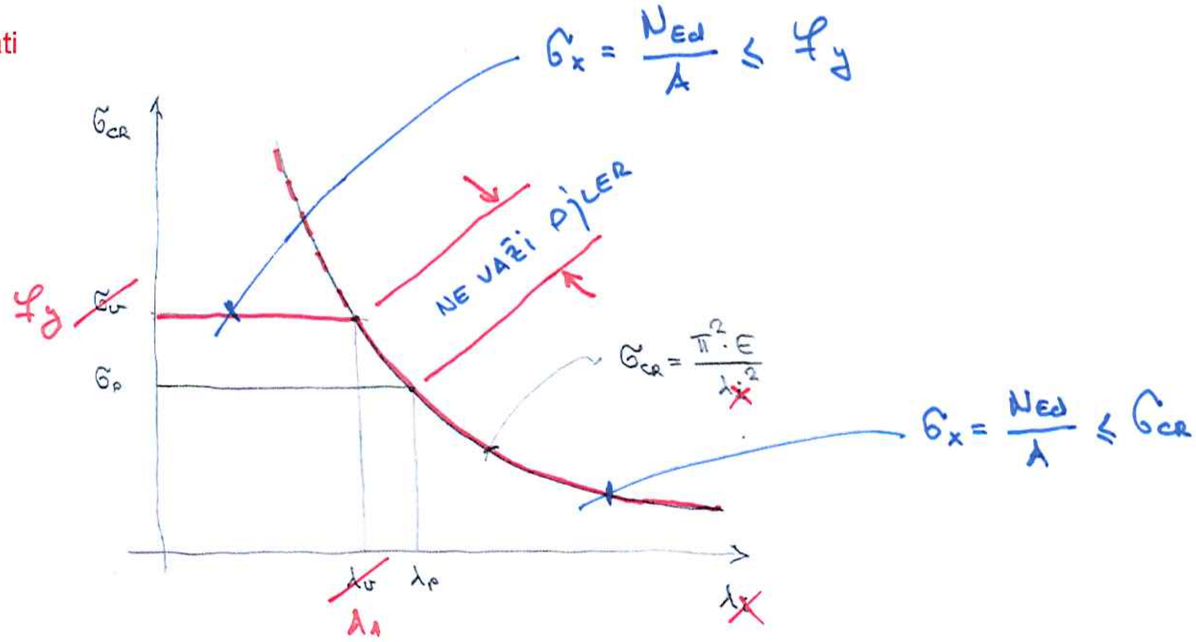
gdje je:

$\lambda = L_E / i$ vitkost, a

$i = \sqrt{I/A}$ poluprečnik inercije za osu izvijanja.

- Izraz za kritični napon predstavlja hiperboličnu jednačinu. Njena validnost je ograničena na napone manje od napona na granici proporcionalnosti, zbog pretpostavke Ojlerove teorije da je materijal idealno elastičan i proporcionalan. Sa druge strane napon ne može biti veći od napona na granici razvlačenja f_y, jer je tada mjerodavna nosivost presjeka, a ne izvijanje.

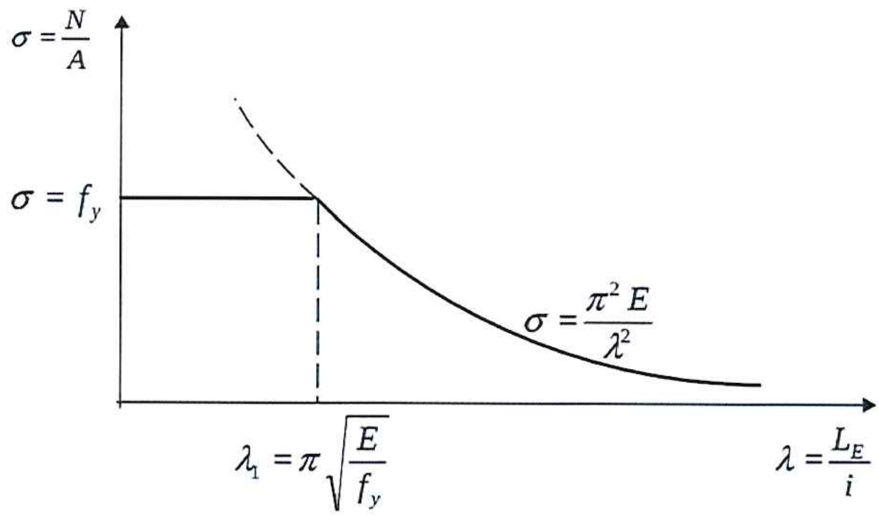
nacrtati



- Ako pretpostavimo elastično (sve do f_y) - idealno plastično ponašanje čelika (što je opravdano za nisko ugljenične čelike), onda može da se definiše vitkost λ_1 koja prema Ojlerovoj hiperboli predstavlja vitkost koja odgovara naponu na granici razvlačenja i koja odvaja elemente kod kojih će biti mjerodavna nosivost presjeka (elementi sa vitkošću manjom od λ_1) od elemenata kod kojih je mjerodavno izvijanje (elementi sa vitkošću većom od λ_1).

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = f_y \Rightarrow \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

- Ponašanje pritisnutog elementa (koji zadovoljava pretpostavke Ojlerove teorije do f_y), u zavisnosti od njegove vitkosti, grafički se pretstavlja sa krivom koja teorijski ograničava nosivost:



- Vitkost λ_1 se naziva koeficijent vitkosti ili vitkost na granici razvlačenja.

- Definiše se još jedna veličina koja se koristi u daljem razmatranju proračuna nosivosti na izvijanje i koja se zove bezdimenzioni koeficijent vitkosti. On pretstavlja odnos vitkosti elementa i vitkosti na granici razvlačenja:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$$

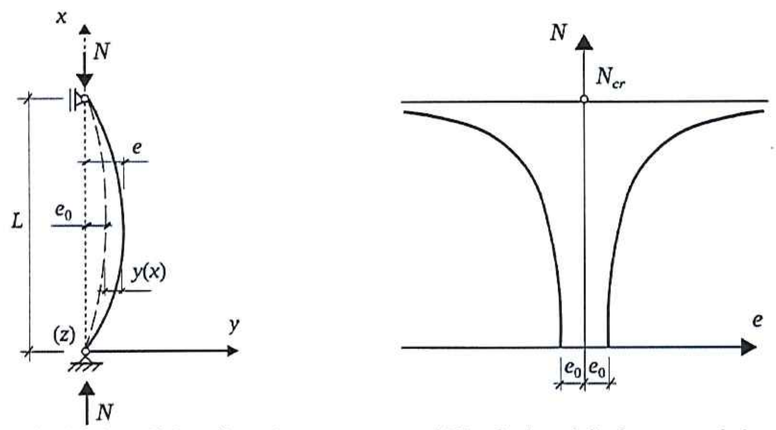
NESAVRŠENOSTI I PLASTIČNA OBLAST

- Teorija se zasniva na idealno pravom, centrično opterećenom i homogenom materijalu. Međutim, u praksi je ovo nemoguće postići. Elementi gotovo uvijek imaju nesavršenosti.

- Nesavršenosti se mogu podijeliti u dvije grupe: geometrijske (element nije idealno prav i ekscentričnost opterećenja) i materijalne (zaostali naponi).

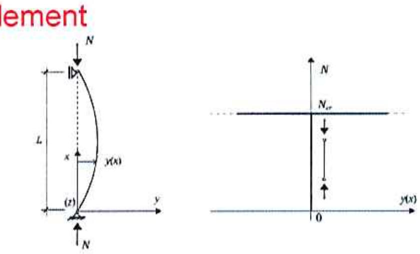
- Kod realnih konstruktivnih elemenata opterećenje je veoma teško unijeti idealno centrično. Realni konstruktivni elementi nikada nisu idealno pravi. I konačno, unutar elemenata uvijek postoje određeni zaostali naponi (usljed valjanja, savijanja, ispravljanja, zavarivanja...).

- Geometrijske nesavršenosti se uvode u razmatranje pretpostavljajući sinusni oblik početnog odstupanja od idealno pravog elementa. Ovo za posljedicu ima i određeni moment savijanja usljed ekscentričnosti opterećenja.



a) Initial sinusoidal configuration b) Load – lateral displacement relation

Ojlerov idealno prav element



- Zaostali (rezidualni) naponi su u većoj ili manjoj mjeri uvijek prisutni u profilu i zavise od vrste profila (I, H, RHS, SHS, CHS...) i vrste obrade prilikom proizvodnje profila (valjanje, savijanje, zavarivanje...). Ovi naponi u određenoj mjeri utiču na smanjenje nosivosti na izvijanje (u odnosu na Ojlerov izraz).

- Sa druge strane, teorijski, između napona na granici proporcionalnosti i napona na granici razvlačenja materijal se ne ponaša idealno proporcionalno tako da ne važi u potpunosti Ojlerova hiperbola.

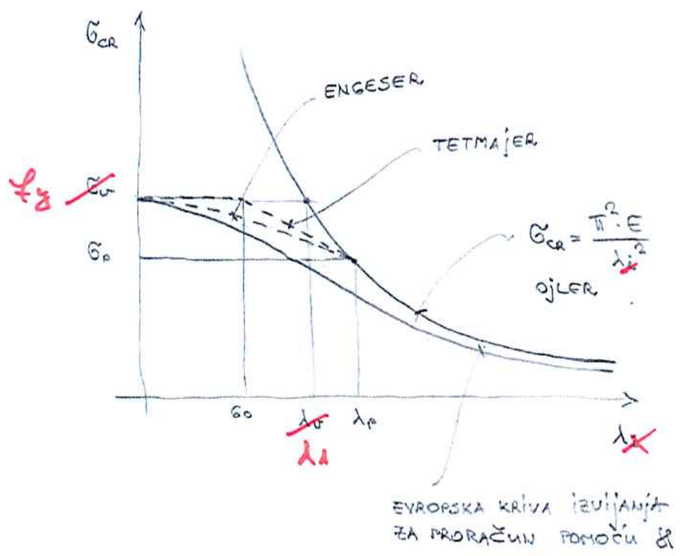
- Prva izučavanja u nelinearnoj oblasti radio je Baušinger (Johann Bauschinger), još u IXX vijeku.

- Tetmajer (Ludwig von Tetmajer) nakon napona na granici proporcionalnosti σ_p, predlaže bilinearnu krivu sa graničnom vitkošću $\lambda = 60$.

- Engeser (Friedrich Engesser), 1909, u Ojlerove izraze, nakon σ_p uvodi tangentni moduo elastičnosti:

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

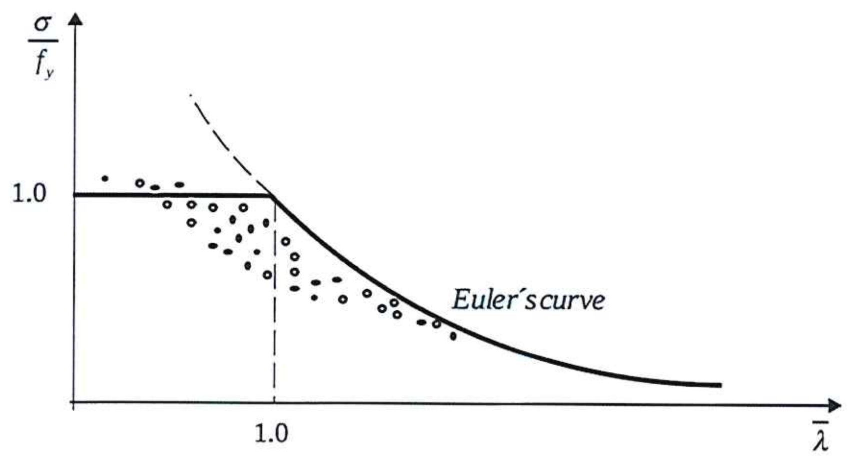
nacrtati



- Svi kasniji radovi se uglavnom oslanjaju na radove Engeser-a.

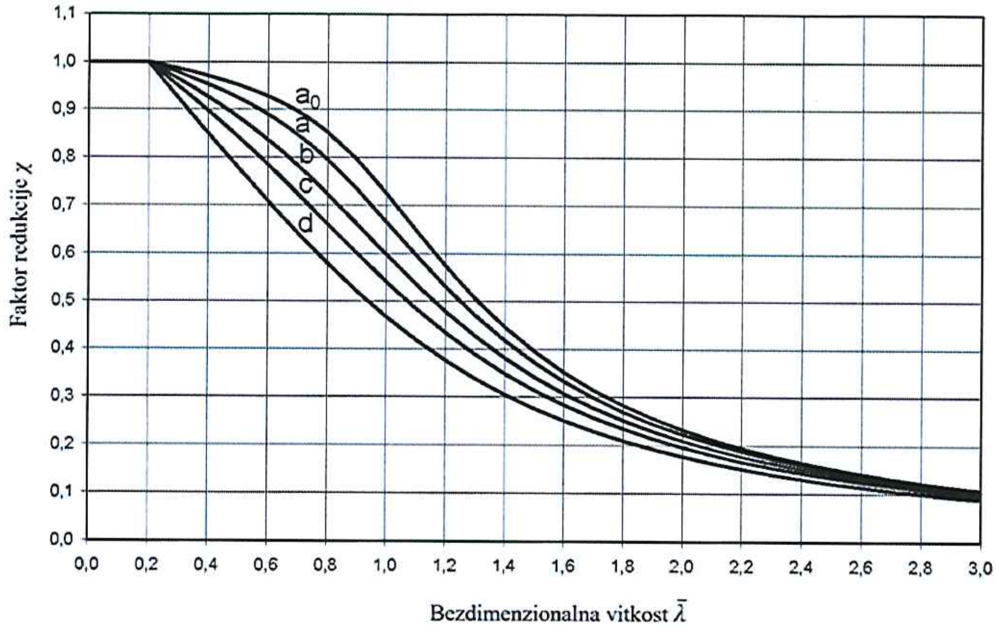
- Efekti nesavršenosti elemenata i plastično ponašanje utiču na smanjenje teorijski sračunate σ_{cr}.

- Eksperimentalni rezultati ispitivanja, realnih pritisnutih elemenata, do loma, prikazani su na sljedećoj skici, sa upoređenjem sa Ojlerovom hiperbolom i naponom na granici razvlačenja:



- Proračun nosivosti realnog pritisnutog elementa se zasniva na uvođenju nesavršenosti i kriterijumu dostizanja napona na granici razvlačenja usljed normalnih napona od sile pritiska i odgovarajućeg momenta savijanja zbog ekscentričnosti opterećenja.

- Proračun nosivosti realnog pritisnutog elementa se zasniva na "Evropskim proračunskim krivima izvijanja". Nakon opsežnih eksperimentalnih i numeričkih istraživanja definisano je pet krivih izvijanja (ECCS, 1977) u kojima se uvodi odnos $\chi = \sigma / f_y$ sa bezdimenzionom vitkošću. Dobijene su krive linije koje simuliraju Ojlerovu hiperbolu, ali se nalaze ispod nje. Služe da se preko njih odredi nosivost realnog pritisnutog elementa. Različiti profili su razvrstani i dodijeljene su im krive izvijanja prema realno većim ili manjim geometrijskim odstupanjima, za ose oko kojih se izvijaju i prema izmjerenim većim ili manjim zaostalim naponima unutar profila.



- Izvođenje izraza za χ, kojim se definišu krive izvijanja prevazilazi obim ovog kursa. Izraz za χ se daje kao:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{ali} \quad \chi \leq 1{,}0$$

gdje je:

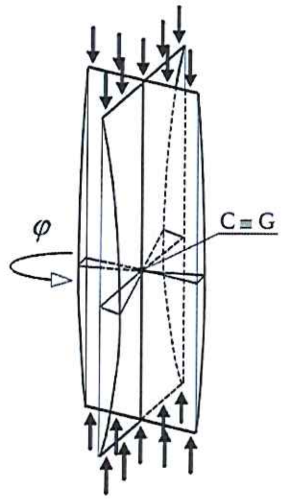
$$\Phi = 0{,}5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0{,}2\right) + \bar{\lambda}^2\right]$$

- Faktor imperfekcije elementa α zavisi od oblika profila, ose izvijanja itd.

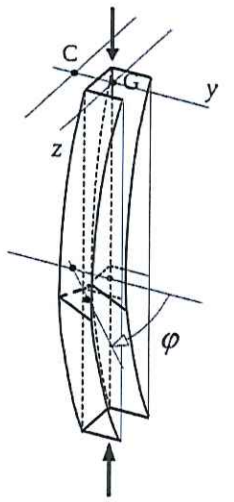
TORZIONO I FLEKSIONO-TORZIONO IZVIJANJE

- Kod pritisnutih elemenata sa tankozidnim otvorenim presjecima, koji imaju izuzetno malu torzionu krutost, može da se desi fenomen torzionog ili fleksiono-torzionog izvijanja prije nego samo fleksiono izvijanje.

- Torziono izvijanje je pojava rotacije presjeka oko podužne ose elementa, usljed sile pritiska. Fleksiono-torziono izvijanje se sastoji od istovremene pojave fleksionog i torzionog izvijanja duž elementa.



a) Torsional buckling



b) Flexural-torsional buckling

- Fenomen torzionog i fleksiono-torzionog izvijanja je pojava karakteristična za tankozidne U i L profile, profile sa porečnim presjekom u obliku krsta itd. Za pritisnute vruće valjane I ili H profile, kritični oblik nestabilnosti je uglavnom fleksiono izvijanje.